Chaos v konzervativních systémech

Kůs P., Hrbek T.

April 27, 2018

Contents

1 Motivace

V přírodě existuje nespočetné množství systémů, které jsou *disipativní*. To znamená, že neexistuje žádná fyzikální veličina (jako energie, moment hybnosti apod.), která by se v systému zachovávala a systém tedy nevykazuje žádný druh symetrie. Takové systémy bývá velice obtížné popsat, některé systémy vykazují chaotické chování a pro studium takových jevů je nutné použít teorii chaosu v disipativních systémech (více například v [1], v českém jazyce je například [2]).

Je otázka, jsou-li všechny reálné systémy v přírodě nutně disipativní. Za jistých okolností můžeme mluvit o *konzervativních* systémech a od disipativních činitelů odhlédnout. Jako příklad uvedeme pohyb matematického kyvadla pohyb nebeských těles nebo vysoce-energetické srážky v urychlovačích částic. I tyto systémy se však za jistých okolností mohou vyvíjet chaoticky (více například [1],[2]).

Smyslem tohoto kratšího textu je dát čtenáři vhled do úplných základů teorie chaosu v konzervativních systémech. Pro více informací pak odkážeme laskavého čtenáře na citované zdroje [1],[2].

2 Úvod do chaosu v konzervativních systémech

Jako hamiltonovské systémy označujeme takové systémy, ve kterých nedochází k disipaci energie. Přesněji řečeno, systém nazveme hamiltonovským, pokud je zároveň konzervativní (*hamiltonova funkce* systému je prvním *integrálem pohybu*, podrobněji rozebráno v další kapitole) a nazýváme jej hamiltonovským, protože časový vývoj systému lze popsat Hamiltonovými kanonickými rovnicemi.

Hamiltonovské systémy můžeme rozdělit na dvě třídy. Integrabilní hamiltonovské systémy, ve kterých nelze pozorovat chaotické chování a neintegrabilní hamiltonovské systémy, ve kterých lze, za určitých podmínek, pozorovat chaotické chování [1]. (Ne)integrabilní systémy budou zvlášť diskutovány v kapitole 2.4.

2.1 Hamiltonův formalismus, fázový prostor

Pro popis zkoumaných systémů budeme užívat Hamiltonův formalismus, který popisuje systém o N stupních volnosti v $2N$ rozměrném fázovém prostoru s nezávislými proměnnými p_i a q_i, tedy s kanonickými hybnostmi a se zobecněnými souřadnicemi. Hamiltonova funkce je definována Legendreovou transformace následujícím způsobem:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{1}$$

kde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ a $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i) - V(q_i, t)$ je Lagrangeova funkce.

Pro nás jsou zajímavé případy, kdy se Hamiltonova funkce podél vývoje systému nemění, tedy Hamiltonova funkce nezávisí explicitně na čase: $H(q_j, p_j, t) \to H(q_j, p_j)$.

Vývoj systému poté získáme derivováním Hamiltonovy funkce $H(q_j, p_j)$, čímž obdržíme Hamiltonovy kanonické rovnice, tedy soustavu $2N$ diferenciální rovnic, jejichž řešením získáme časovou závislost $q_i(t)$, $p_i(t)$. I-tou dvojici hamiltonových rovnic získáme jako

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(q_j, p_j)}{\partial p_i}, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(q_j, p_j)}{\partial q_i}. \tag{3}$$

Může být užitečné změnit parametrizaci a pomocí kanonické transformace přejít k jiným kanonickým proměnným. Přechod mezi dvěma systémy kanonických proměnných se koná prostřednictvím generujících funkcí (ty jsou celkem čtyři: F_i, $i = 1, 2, 3, 4$; na výběru však z principu nezáleží, transformace jsou vzájemně ekvivalentní) [1], více například v ([2]).

Z předchozího odstavce je zřejmé, že při kanonické transformaci dochází ke změně Hamiltonovy funkce. Je geniální trik zvolit takovou generující funkci $S = F_i$ (například $i = 2$), abychom kanonickou transformací dostali nulový hamiltonián. Lze pak triviálně ukázat, že příslušející kanonické souřadnice jsou konstantní ($Q_i = \text{konst}$, $P_i = \text{konst}$) a obraz systému ve fázovém prostoru

[1] Využívá se přitom volnosti v určení příslušné Lagrangeovy funkce, což lze nahlédnout z variování akce J.

se s časem nemění. Navíc musí nutně platit: $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$. Rovnice pro kanonickou transformaci hamiltoniánu je tak jedinou rovnicí, která nám popisuje celý vývoj systému. Je označována jako *Hamiltonova-Jacobiho rovnice* a obecněji ji můžeme zapsat takto[2]: $H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

2.2 Liouvilleova věta

Liouilleova věta říká, že se objem fázového prostoru nemění při časovém vývoji systému. Z toho plyne, že v konzervativních systémech nejsou přítomny atraktory jako v disipativních systémech, což usnadňuje hledání výsledných trajektorií, na druhou stranu to komplikuje vliv počátečních podmínek tak, že se systém při mírně odlišných počátečních podmínkách chová typově jinak, protože nepřejde na žádný typický atraktor jako u disipativních systémů.

Náznačení důkazu Liouvilleovy věty

Liouvilleova věta je důsledkem jiné, obecnější věty: *Objem fázového prostoru je invariantní vůči kanonickým transformacím.*

Při přechodu od jedné báze {q,p} k jiné {Q,P} je potřeba určit Jacobián [3]:

$$|J| = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \{Q, P\} = 1, \tag{4}$$

kde $\{Q, P\} = 1$ je fundamentální Poissonova závorka.

Objem fázového prostoru je roven:

$$V = \int\int dQdP = \int\int |J| dqdp = \int\int dqdp \tag{5}$$

Při kanonické transformaci se nemění objem fázového prostoru. Navíc se ukazuje, že *vývoj systému lze chápat jako speciální kanonickou transformaci z počátečního do koncového stavu* (viz Brdička, Hladík str. 363). Q.E.D.

Dalším důsledkem [1] je to, že pokud budeme pozorovat vývoj hustoty pravděpodobnosti stavu ρ, nebudeme pozorovat chaotické chování, vývoj bude lineární. Pro pozorování chaotického chování je tedy třeba sledovat vývoj jednotlivých trajektorií.

2.3 Integrály pohybu

V případě, že pro nějakou funkci f souřadnic fázového prostoru q_i, p_i platí, že se při časovém vývoji systému nemění, tedy

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

nazveme ji integrálem pohybu. Systém, který má nějakou zachovávající se veličinu, vykazuje jistou symetrii (například zachování energie je spojeno se symetrií vůči časovému posunutí, zachování momentu hybnosti souvisí s rotační symetrií apod.), což je obsahem teorému Emmy Noetherové. V případě, že má systém stejný počet stupňů volnosti jako má integrálů pohybu, nazveme jej *integrabilním*, v opačném případě jej nazveme *neintegrabilním.* (Ne)integrabilitu systému lze zadefinovat pomocí *cyklického hamiltoniánu*, což provedeme v další kapitole

2.4 Integrabilní a neintegrabilní systémy

Definice pomocí integrálů pohybu

Integrabilní systém má stejné množství integrálů pohybu jako stupňů volnosti. V takovém případě je možné nalézt kanonické transformace, které vyjadřují integrály pohybu ve tvaru akčních

[2]Pro jistotu připomínáme, že nás zajímá případ, kdy hamiltonián nezávisí explicitně na čase, avšak obecně samozřejmě platí: $H(q_i, \frac{\partial S,}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

[3]Pro zjednodušení důkazu provedeme důkaz jen pro dvoudimenzionální fázový prostor.

proměnných $J_i(p,q)$, k nimž jsou kanonicky sdružené bezrozměrné úhlové proměnné $\theta_i(q,p)$. To, že jsou původní proměnné (q,p) a nové proměnné (J,θ) svázány kanonickou transformací, zaručuje zachování tvaru rovnic (2) a (3). V případě periodické trajektorie ve fázovém prostoru je poté akce (akční proměnná) úměrná ploše ohraničené trajektorií ve fázovém prostoru. Trajektorie integrabilních systému se obecně pohybují po povrchu toroidu. [1]

Definice pomocí cyklické Hamiltonovy funkce

Pro řadu dynamických úloh (jako oscilační systémy) je výhodně přejít do kanonické báze tvořené ze veličin akce J_i a kanonicky sdruženého úhlu w_i (čímž je zachován tvar Hamiltonových kanonických rovnic). Pokud je Hamiltonova funkce nezávislá na čase a separovatelný, lze využít Hamiltonovu-Jacobiho rovnici ([2]):

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i\right) \tag{7}$$

Jednotlivé komponenty jsou definovány následovně:

$$H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i\right) = \alpha_i \tag{8}$$

Akce je definována následovně:

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\int p_i dq_i = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial S_i(q_i,\alpha_i)}{\partial q_i} dq_i \tag{9}$$

kde $J_i = J(\alpha_i)$konst mají význam nových kanonických hybností. Kanonicky sdružené souřadnice, tedy úhly w_i jsou pak definovány generující funkcí:

$$w_i = \frac{\partial S_j}{\partial J_i} \tag{10}$$

Vyjádřeme hamiltonián H pomocí α_i:

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(J_i) \tag{11}$$

Hamiltonián, který je separovatelný a lze ho zapsat jako funkci J (ve smyslu předchozího vztahu), se nazývá cyklický[2].

S pomocí již zavedených veličin lze integrabilní systém definovat i jinak. Systém je integrabilní, pokud lze jeho Hamiltonovu funkci zapsat v cyklickém tvaru[4]: $H = H(q_i,p_i) = \bar{H}(J_i)$ [2].

Obecně je systém integrabilní, pokud je Hamiltonova-Jacobiho rovnice separovatelná do N nezávislých rovnic. Pokud separovatelná není, nazývá se systém neintegrabilní a takový systém vykazuje chaotické chování.

Příkladem integrabilního systému je například jednoduchý harmonický oscilátor nebo matematické kyvadlo (Figure 1). Jako eliptický bod označujeme fixní bod, v jehož okolí jsou trajektorie elipsy. Další pevné body, odpovídající poloze kyvadla ve vratké rovnovážné poloze přímo nad upevněním se nazývají hyperbolické body hamiltonovského systému. Trajektorie, které vedou přímo do, nebo z, hyperbolického bodu se nazývají separatrix, neboť oddělují části fázového prostoru s výrazně odlišným chováním.

Jak vyplynulo z předchozího výkladu, pokud nelze najít generující funkci, kterou by přešel hamiltonián do cyklického tvaru, je systém neintegrabilní. To už jak víme i znamená, že máme menší počet integrálů pohybu než je počet stupňů volnosti. V takovém případě se trajektorie odchýlí od povrchu toroidu a začne se pohybovat v další dimenzi, což umožní chaotické chování[1]. Typickým příkladem je dobře známý *Problém N-těles* (podrobněji rozebrán například v [2]).

[4] Tedy hamiltonián závislý čistě na J_i)

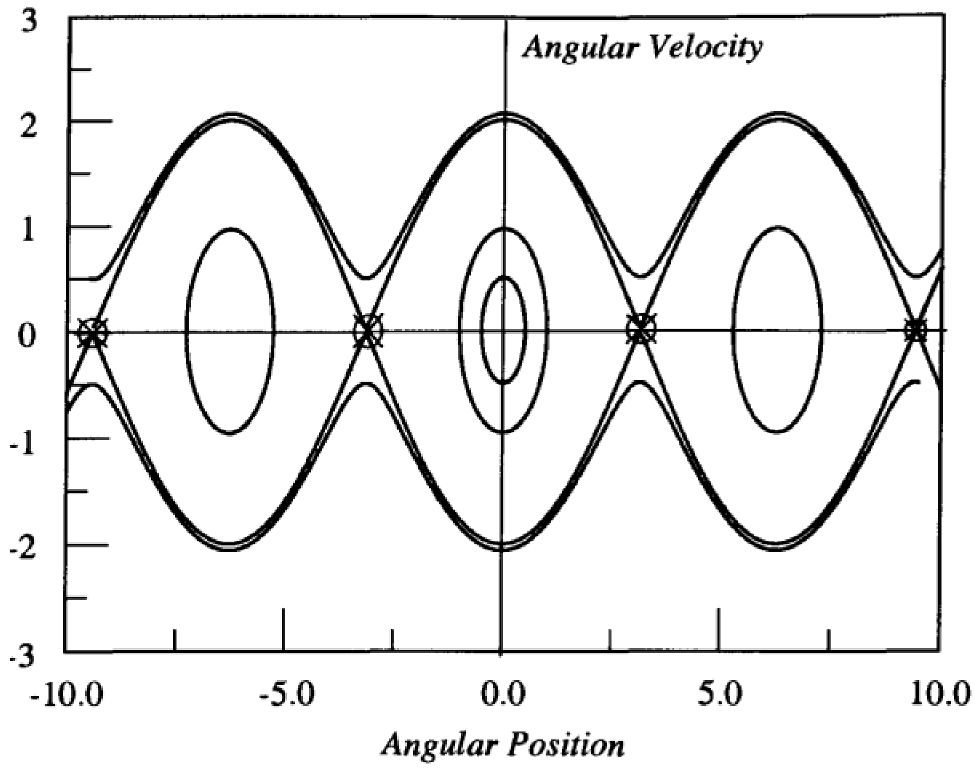

Figure 1: Trajektorie kyvadla ve fázovém prostoru

3 Pár slov ke KAM teorii

KAM teorie je teorie pojmenována po pánech Kolmogorov, Arnold a Moser, kteří svými pracemi navázali na problém řešený už Poincarém a to studium vývoje systému poblíž separatrisy. Poincaré při diskuzi průběhu fázové trajektorie systému narazil na velkou komplikovanost problému. Jeho nástupci pak hledali spíše režimy, ve kterých se lze komplikovanosti vyhnout. KAM teorie je stručně řečeno teorií slabě neintegrabilních hamiltonovských systémů, lze vyjádrit takto:

$$H = H_0(J_i) + \epsilon H_1(J_i, w_i)$$

kde $\epsilon << 1$ a člen $\epsilon H_1(J_i, w_i)$ má význam poruchy a způsobuje neintegrabilitu systémů.

KAM teorie vychází z řady prací z oblasti nebeské mechaniky, využívá se klasické perturbační metody a vede například k předpovědím orbitální rezonance (více v [2]), která nastává u Jupitera a Slunce.

4 Další souvislosti

Chaotické chování se také projevuje v řadě reálných systému, které můžeme aproximovat jako konzervativní systémy. Uveďme nyní stručně několik příkladů.

Příkladem výskytu chaosu v konzervativních systémech je hra kulečník. V případě, že má hrací plocha tvar "stadionu" s rovnými bočními stěnami a půlkruhy na koncích, je možné v takovémto systému pozorovat chaotické chování. [1].

Při urychlování částic v urychlovačích je také velmi často možné, díky jejich velmi vysoké energii, zanedbat disipaci energie a užít pro popis jejich stability teorii hamiltonovských konzervativních systémů. [1]

Tuto teorii lze také použít [1] pro popis chování supravodiče vloženého do vnějšího magnetického pole. Elektrony v takovém supravodiči se seskupí do vírových mřížek, pohyb těchto vírů následně může vykazovat chaotické chování.

5 Závěr

Stručně jsme nastínili, že chaotické chování lze pozorovat i v hamiltonovských konzervativních systémech, za předpokladu, že mají dostatečný počet stupňů volnosti. Uvažování hamiltonovských konzervativních systémů umožňuje jednodušší popis dané soustavy než v případě uvažování disipace enregie. V případě, že je možné disipaci energie zanedbat může užití této aproximace přinést, ač za cenu snížené přesnosti, dobrý vhled do vývoje systému, který by byl při uvažování disipace energie příliš složitý na řešení.

References

[1] HILBORN, Robert C. Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. New York: Oxford University Press, second edition, 2000, ISBN: 978-0-471-87645-8.

[2] J. HORÁK, L. KRLÍN: Deterministický chaos a matematické modely turbulence, Academia, Praha, (1996)